2 CÁLCULO DE PRIMITIVAS

2.1 INTEGRALES "SENCILLAS"

SUMA

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

PRODUCTO POR UN NÚMERO

$$\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

POTENCIAS

$$\int 1\, dx = x + k$$

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k, \quad \text{si} \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int x^{-1}\, dx = ln\,|x| + k$$

$$\int f(x)^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + k, \quad \text{si} \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = ln\,|f(x)| + k$$

EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

$$\int e^x\, dx = e^x + k$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{ln\, a} + k$$

$$\int ln\, x\, dx = x\, ln\, x - x + k$$

$$\int log_a x\, dx = \frac{x\, ln\, x - x}{ln\, a} + k$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + k$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{ln\, a} + k$$

$$\int ln\, f(x) \cdot f'(x)\, dx = \overset{f(x)}{\cancel{x}}\, ln\, f(x) - f(x) + k$$

$$\int log_a f(x) \cdot f'(x)\, dx = \frac{x\, ln\, f(x) - f(x)}{ln\, a} + k$$

TRIGONOMÉTRICAS

$$\int sen\, x\, dx = -cos\, x + k$$

$$\int cos\, x\, dx = sen\, x + k$$

$$\int tg\, x\, dx = -ln\,|cos\, x| + k$$

$$\int (1 + tg^2\, x)\, dx = \int \frac{1}{cos^2 x}\, dx = tg\, x + k$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = arc\, tg\, x + k$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = arc\, sen\, x + k$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = arc\, cos\, x + k$$

$$\int sen\, f(x) \cdot f'(x)\, dx = -cos\, f(x) + k$$

$$\int cos\, f(x) \cdot f'(x)\, dx = sen\, f(x) + k$$

$$\int tg\, f(x) \cdot f'(x)\, dx = -ln\, |cos\, f(x)| + k$$

$$\int [1 + tg^2\, f(x)] \cdot f'(x)\, dx = \int \frac{f'(x)}{cos^2 f(x)}\, dx = tg\, f(x) + k$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}\, dx = arc\, tg\, f(x) + k$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}\, dx = arc\, sen\, f(x) + k$$

$$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}\, dx = arc\, cos\, f(x) + k$$

EJERCICIO RESUELTO

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 2}{x - 1} dx$ **b)** $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{2x^2}}{\sqrt[4]{x}} dx$ **c)** $\int \frac{2sen\, x + 3e^x}{5} dx$

RESOLUCIÓN

a) Efectuamos la división y expresamos el resultado de la forma $\frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}$:

$$\int \frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 2}{x - 1} dx = \int \left(x^3 + x^2 - 2x + \frac{-2}{x-1}\right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 - 2ln\,|x - 1| + k$$

b) $$\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{2x^2}}{\sqrt[4]{x}} dx = \int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} + \frac{\sqrt{2x^2}}{\sqrt[4]{x}}\right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \sqrt{2}\, x^{1 - \frac{1}{4}}\right) dx =$$

$$= \int \left(x^{\frac{1}{12}} + \sqrt{2}\, x^{\frac{3}{4}}\right) dx = \frac{x^{13/12}}{13/12} + \sqrt{2}\, \frac{x^{7/4}}{7/4} + k = \frac{12\, \sqrt[12]{x^{13}}}{13} + \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{x^7}}{7} + k$$

c) $$\int \frac{2sen\, x + 3e^x}{5} dx = \frac{-2cos\, x + 3e^x}{5} + k$$

Calcula las siguientes integrales:

1 a) $\int (x^4 - 3x^2 + 2x - 1)\, dx$ b) $\int (x^3 - 2x)\, dx$

2 a) $\int \left(\frac{3}{4}x^5 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{7}\right) dx$ b) $\int x^3\,(x + 5)\, dx = \int (x^4 + 5x^3)\, dx$

3 a) $\int (x - 2)(x^2 + 4x)\, dx$ b) $\int (x^2 - 3)^2\, dx = \int (x^4 - 6x^2 + 9)\, dx$

4 a) $\int (2x^2 - 3)^2\, dx$ b) $\int \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} dx$

5 a) $\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{2x} dx$ b) $\int \left(\frac{1}{2}e^x - \frac{3}{4}cos\, x\right) dx$

6 a) $\int \frac{3}{cos^2 x} dx$ b) $\int \frac{3sen\, x + 2^x}{4} dx$

7 a) $\int \frac{3}{1 + x^2} dx$ b) $\int \frac{e^x + tg\, x}{3} dx$

8 a) $\int \left(\frac{3}{x} + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x^4}\right) dx$ b) $\int \left(3^x + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x}\right) dx$

EJERCICIO RESUELTO

Calcula estas integrales:

a) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ ***b)*** $\int \frac{2\,dx}{x\ln x}$ ***c)*** $\int \frac{5x+3}{x^2+1}\,dx$

Resolución

a) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} + k$

b) $\int \frac{2\,dx}{x\ln x} = 2\int \frac{1/x}{\ln x}\,dx = 2\ln|\ln x| + k$

c) $\int \frac{5x+3}{x^2+1}\,dx = \int\left(\frac{5x}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+1}\right)dx = \frac{5}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx + 3\int\frac{1}{1+x^2}\,dx =$

$= \frac{5}{2}\ln|x^2+1|\ 3\text{arc tg}\, x + k$

Halla las siguientes integrales:

9 a) $\int 2x(x^2+1)^8\,dx$ b) $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$

10 a) $\int x\sqrt{1-3x^2}\,dx$ b) $\int \cos x\cdot(\text{sen}\,x)^5\,dx$

11 a) $\int \text{sen}\,x\cos^4 x\,dx$ b) $\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx$

12 a) $\int \frac{x}{3x^2-2}\,dx$ b) $\int \frac{12x^2-4x}{4x^3-2x^2+1}\,dx$

13 a) $\int \frac{3x^2-x}{4x^3-2x^2+1}\,dx$ b) $\int \frac{\cos x}{\text{sen}^6 x}\,dx$

14 a) $\int \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}\,dx$ b) $\int e^{6x+5}\,dx$

15 a) $\int 2x\,e^{x^2-3}\,dx$ b) $\int (x-1)\,e^{3x^2-6x}\,dx$

16 a) $\int \frac{e^{\text{tg}\,x}}{\cos^2 x}\,dx$ b) $\int (6x^3-1)\cos(3x^4-2x)\,dx$

17 a) $\int (2^{5x}-\text{tg}\,x)\,dx$ b) $\int 3\cos x\,e^{\text{sen}\,x}\,dx$

18 a) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx$ b) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

Calcula las siguientes integrales:

19 a) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x}}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int x^4(x+1)\,dx$

20 a) $\displaystyle\int x^3(2x^4-3)^5\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{3x}+\sqrt{2x}}{x}\,dx$

21 a) $\displaystyle\int \left(\frac{7x}{3}+\frac{3}{7x}\right)dx$ b) $\displaystyle\int \left(2x-\frac{1}{3}\right)(x^2-2)\,dx$

22 a) $\displaystyle\int \frac{3}{(x-2)^4}\,dx$ b) $\displaystyle\int (2x+1)^3\,dx$

23 a) $\displaystyle\int \sqrt[3]{(x+1)^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$

24 a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\cos x+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x-\cos x}\,dx$

25 a) $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{6x^3-1}{3x^4-2x+1}\,dx$

26 a) $\displaystyle\int \frac{e^x+\cos x}{e^x+\operatorname{sen} x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$

27 a) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(x^2-2)\,dx$ b) $\displaystyle\int (3x^2-2)\,e^{x^3-2x}\,dx$

28 a) $\displaystyle\int \frac{e^{\ln x}}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{1+x^2}\,dx$

29 a) $\displaystyle\int x\cdot 3^{x^2+1}\,dx$ b) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

30 a) $\displaystyle\int [\operatorname{sen}(3x+1)+e^{3x}]\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)^3}\,dx$

31 a) $\displaystyle\int (2^{-x}+\ln x)\,dx$ b) $\displaystyle\int (\sqrt{x}+2)(x+\sqrt{x})\,dx$

32 a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx=\int \frac{x}{1+(x^2)^2}\,dx$

33 a) $\displaystyle\int \frac{\log_3(x+2)}{5}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+(\operatorname{sen} x)^2}\,dx$

34 a) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\pi}{1+x^2}\,dx$

35 a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx=\int\left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$ b) $\displaystyle\int \frac{-3x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx$

2.2 MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

EJERCICIO RESUELTO

Resuelve, utilizando un cambio de variable, las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

RESOLUCIÓN

a) En este caso, el cambio de variable lo podríamos haber realizado mentalmente; en las páginas anteriores ya hemos resuelto directamente integrales de este tipo. Veamos cómo calcularla mediante un cambio de variable:

Hallamos $t = x^3 \to dt = 3x^2\,dx$; queda así:

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\cdot \underbrace{3x^2\,dx}_{dt} = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + k = \frac{1}{3}e^{x^3} + k$$

b) Cambio: $t = \sqrt{x-1} \to t^2 = x-1 \to x = t^2+1 \to dx = 2t\,dt$

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (t^2+1)\cdot t\cdot 2t\,dt = \int (2t^4+2t^2)\,dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + k =$$

$$= \frac{2\sqrt{(x-1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3} + k$$

c) Cambio: $t = \sqrt{e^x-1} \to t^2 = e^x - 1 \to e^x = t^2+1 \to x = ln\,(t^2+1) \to dx = \dfrac{2t}{t^2+1}dt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \int \frac{2t}{(t^2+1)t}\,dt = \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt = 2\,arc\,tg\,t + k = 2\,arc\,tg\,\sqrt{e^x-1} + k$$

---

1 Resuelve por sustitución las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ (Cambio: $t = \sqrt[3]{x}$)

b) $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}}$ (Cambio: $t = \sqrt{x+2}$)

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}$

e) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$ (Cambio: $t = \sqrt{e^x+1}$)

f) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x+1}$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ (Cambio: $t = \dfrac{1}{x}$)

h) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ (Cambio: $x = sen\,t$)

Utiliza la fórmula: $cos^2\,t = \dfrac{1}{2} + \dfrac{cos\,2t}{2}$

2.3 INTEGRACIÓN "POR PARTES"

FÓRMULA DE INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

EJERCICIO RESUELTO

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int (2x+1)\,e^x dx$ ***b)*** $\int e^x \cos x\,dx$

RESOLUCIÓN

a) Llamamos: $\begin{cases} u = 2x+1 \rightarrow du = 2\,dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{cases}$; y aplicamos la fórmula:

$$\int (2x+1)\,e^x\,dx = (2x+1)\,e^x - \int 2e^x\,dx = (2x+1)\,e^x - 2e^x + k = (2x-1)\,e^x + k$$

b) ① $\begin{cases} u_1 = e^x \rightarrow du_1 = e^x dx \\ dv_1 = \cos x\,dx \rightarrow v_1 = \operatorname{sen} x \end{cases}$ ② $\begin{cases} u_2 = e^x \rightarrow du_2 = e^x dx \\ dv_2 = \operatorname{sen} x\,dx \rightarrow v_2 = -\cos x \end{cases}$

$$\underbrace{\int e^x \cos dx}_{I} \overset{①}{=} e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx \overset{②}{=} e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \cos x\,dx}_{I}$$

$$\Rightarrow 2I = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x \Rightarrow I = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + k$$

1 Aplica la integración por partes para resolver estas integrales:

a) $\int 3x e^x\,dx$

b) $\int (x^2+1)\,e^x\,dx$ (Aplica dos veces el método)

c) $\int (x+1)\cos x\,dx$

d) $\int (x^2+2)\operatorname{sen} x\,dx$

e) $\int (x+1)^2\,e^x\,dx$

f) $\int x^2 \ln x\,dx$ ($u = \ln x$; $dv = x^2\,dx$)

g) $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$ ($u = \operatorname{arc\,tg} x$; $dv = dx$)

h) $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$

2.4 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

EJERCICIO RESUELTO

DENOMINADOR DE PRIMER GRADO

Resuelve estas integrales: ***a)*** $\int \frac{1}{3x+1}\,dx$ ***b)*** $\int \frac{x^2-2x}{x+3}\,dx$

RESOLUCIÓN

a) $\int \frac{1}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + k$

b) Efectuamos la división y expresamos el resultado de la forma $\frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}$:

$$\int \frac{x^2-2x}{x+3}\,dx = \int\left(x-5+\frac{15}{x+3}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 5x + 15\ln|x+3| + k$$

1 Calcula estas integrales, dividiendo previamente cuando sea necesario:

a) $\int \frac{2}{5x-1}\,dx$

b) $\int \frac{3x+1}{x-2}\,dx$

c) $\int \frac{x^2-3x+1}{x+1}\,dx$

d) $\int \frac{x^3+2x^2-x}{2x+1}\,dx$

EJERCICIO RESUELTO

EL DENOMINADOR SOLO TIENE RAÍCES REALES SENCILLAS

Calcula: $\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-2x}\,dx = \int \frac{2x+1}{x(x+1)(x-2)}\,dx$

RESOLUCIÓN

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow\ 2x+1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sustituyendo } x=0 \to 1=-2A \to A=\frac{-1}{2} \\ \text{Sustituyendo } x=-1 \to -1=3B \to B=\frac{-1}{3} \\ \text{Sustituyendo } x=2 \to 5=6C \to C=\frac{5}{6} \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x+1}{x(x+1)(x-2)}\,dx = \int\left(\frac{-1/2}{x} + \frac{-1/3}{x+1} + \frac{5/6}{x-2}\right)dx = \frac{-1}{2}\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{5}{6}\ln|x-2| + k$$

2 Halla estas integrales, dividiendo previamente cuando sea necesario, y descomponiendo en fracciones simples:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,(x-3)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-4}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2-4}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x^2+1}{x^2+x-6}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x(x-1)(x+2)}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^4+2}{x^3-x}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^2-4x-4}\,dx$

EJERCICIO RESUELTO

EL DENOMINADOR TIENE RAÍCES REALES MÚLTIPLES

Calcula: $\displaystyle\int \frac{-x^4-5x^3-x^2-3x-2}{x^5+x^4-x^3-x^2}\,dx = \int \frac{-x^4-5x^3-x^2-3x-2}{x^2(x-1)(x+1)^2}\,dx$

RESOLUCIÓN

En primer lugar, habría que factorizar el denominador; en este caso ya lo tenemos hecho. Después, descomponemos en fracciones simples como sigue:

$$\frac{-x^4-5x^3-x^2-3x-2}{x^2(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}$$

Operando en el segundo miembro e identificando numeradores (de modo análogo a como lo hicimos en el ejercicio resuelto de la página anterior), llegamos a que:

$A = 1,\ \ B = 2,\ \ C = -3,\ \ D = 1,\ \ E = -2$

Por tanto, la integral queda:

$$\int\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{-3}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2}\right)dx = ln\,|x| - \frac{2}{x} - 3\,ln\,|x-1| + ln\,|x+1|\ \frac{2}{x+1} + k$$

3 Calcula estas integrales, descomponiendo en fracciones simples:

a) $\int \frac{1}{(x-2)^4}\,dx$

b) $\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx$

c) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\,dx$

d) $\int \frac{2x+1}{x^2\,(x-1)^2}\,dx$

e) $\int \frac{3x}{(x-1)^2\,(x-2)^2}\,dx$

f) $\int \frac{2}{x^4-3x^3+4x}\,dx$

EJERCICIO RESUELTO

EL DENOMINADOR ES UN POLINOMIO DE SEGUNDO GRADO SIN RAÍCES REALES

Calcula estas integrales, en las que el denominador no tiene raíces reales:

a) $\int \frac{5}{x^2+2x+3}\,dx$

b) $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx$

Resolución

a) Transformamos el denominador para obtener un binomio al cuadrado y operamos hasta llegar a una integral relacionada con la arcotangente:

$$\int \frac{5}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{5}{(x^2+2x+1)+2}\,dx = \int \frac{5}{(x+1)^2+2}\,dx = \int \frac{5/2}{\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{2}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx = \frac{5\sqrt{2}}{2}\int \frac{1/\sqrt{2}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx = \frac{5\sqrt{2}}{2}\,arc\,tg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+k$$

b) Cuando el numerador es de primer grado, descomponemos en un logaritmo neperiano y un arcotangente:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-2}{x^2+4x+5}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\,ln\,|x^2+4x+5| - \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,ln\,|x^2+4x+5| - arc\,tg\,(x+2)+k$$

4 Resuelve las siguientes integrales en las que el denominador es un polinomio de segundo grado sin raíces reales (no olvides dividir previamente cuando sea necesario):

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{3}{4x^2 + 4x + 2}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{9}{x^2 - 6x + 10}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{5}{4x^2 - 4x + 3}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 2}\,dx$

5 Calcula las siguientes integrales de funciones racionales:

a) $\displaystyle\int \frac{x + 2}{x - 2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 3x + 2}{2x + 1}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 4x^2 + 2x}{x - 4}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,(x + 1)}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x + 2}{x\,(x + 1)}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x\,(x + 1)}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2 + x - 2}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{2x - 3}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,(x - 2)^2}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{(x - 1)^2}\,dx$

k) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$

l) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + (3x - 2)^2}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2 - 8x - 17}\,dx$

n) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 4}\,dx$

2.5 EJERCICIOS DE RECAPITULACIÓN

Calcula las siguientes integrales:

1. a) $\int \left(\frac{-x^4}{5} + \frac{2x^3}{7} - \frac{3}{4} \right) dx$ b) $\int x^4 (2x + 1)\, dx$

2. a) $\int (x^2 + 1)^2\, dx$ b) $\int \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt{3x}}{2x}\, dx$

3. a) $\int (2e^x - 3^x)\, dx$ b) $\int (\cos x - tg\, x)\, dx$

4. a) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2} \right) dx$ b) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{1 + x^2} \right) dx$

5. a) $\int (1 + tg^2 x + sen\, x)\, dx$ b) $\int \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

6. a) $\int \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$ b) $\int \frac{x(3x^2 - 1)^6}{2}\, dx$

7. a) $\int 3x \sqrt[3]{x^2 + 1}\, dx$ b) $\int 3\cos x\, sen^5 x\, dx$

8. a) $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 5}\, dx$ b) $\int \frac{2x}{5x^2 - 2}\, dx$

9. a) $\int \frac{e^x}{2e^x - 1}\, dx$ b) $\int x\, e^{x^2 - 5}\, dx$

10. a) $\int x^2\, sen\, (4x^3 - 1)\, dx$ b) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

11. a) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\, dx$ b) $\int x \cdot 5^{3x^2 - 1}\, dx$

12. a) $\int \frac{2\cos x}{sen^2 x}\, dx$ b) $\int \frac{\cos x}{1 + sen^2 x}\, dx$

13. a) $\int 3 \ln x\, dx$ b) $\int \log_2 (x + 1)\, dx$

14. a) $\int \frac{\cos (1/x)}{x^2}\, dx$ b) $\int (x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})\, dx$

Halla las siguientes integrales:

15 a) $\displaystyle\int \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}\,dx$

(Cambio: $t = \sqrt{x}$)

b) $\displaystyle\int \frac{sen^3 x}{\sqrt{cos\, x}}\,dx$

(Cambio: $t = \sqrt{cos\, x}$; ten en cuenta que: $sen^3 x = sen^2 x \cdot sen\, x = (1 - cos^2 x) \cdot sen\, x$)

16 a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(Cambio: $x = sen\, t$; utiliza la fórmula $sen^2 t = \frac{1}{2} - \frac{cos\, 2t}{2}$)

b) $\displaystyle\int e^{2x}\, sen\, e^x\, dx$

(Cambio: $t = e^x$)

17 a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

(Cambio: $t = \sqrt{2x+1}$)

b) $\displaystyle\int (2x^2 - 3)\, e^x\, dx$

18 a) $\displaystyle\int (3x - 1)\, cos\, x\, dx$

b) $\displaystyle\int 4x^3\, ln\, x\, dx$

19 a) $\displaystyle\int e^{-x}\, cos\, x\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\, dx = \int x\, e^{-x}\, dx$

20 a) $\displaystyle\int \frac{5x-4}{x+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+2}{x+2}\,dx$

21 a) $\displaystyle\int \frac{3x^3-2x^2}{x-1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{5x+2}{3x-1}\,dx$

22 a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-9}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$

23 a) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-3)(x+1)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x(x-2)}\,dx$

24 a) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^3-4x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x-5)}\,dx$

25 a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+3}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-10x+26}\,dx$

26 a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-10x+27}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x-4}{x^2-10x+26}\,dx$